

# Les modèles d'appariement

Présentation à Algocit

18 janvier 2016

# Référence

Prix 2012 de la Banque de Suède en mémoire d'Alfred Nobel : Alvin Roth and Lloyd Shapley

*“Appariement : des modèles de Lloyd Shapley à la conception de marchés d'Alvin Roth”*

Françoise Forges, Guillaume Haeringer, Vincent Iehlé (2013), Revue d'Economie Politique, 123 (5).

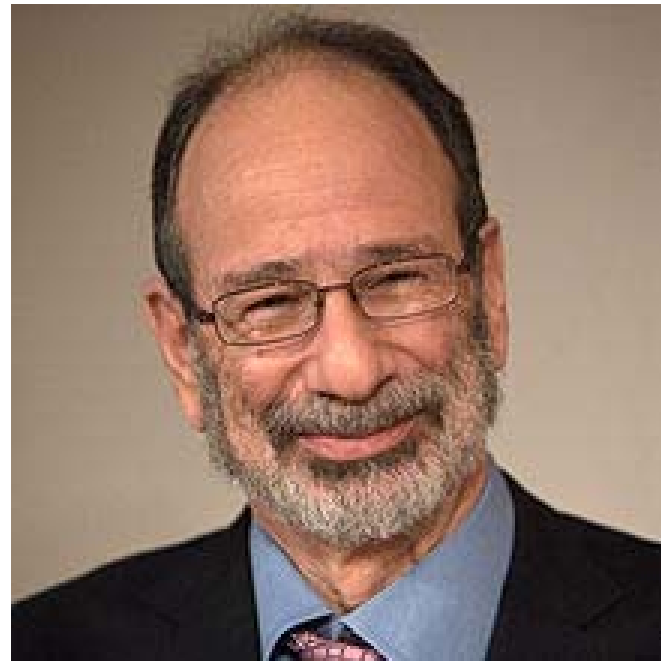
# Shapley et Nash à Marseille

## 2<sup>nd</sup> World congress of the game theory society (2004)



# Shapley, Aumann et Nash à Marseille recevant la médaille de la ville (2004)





# Les problématiques de l'appariement

- L'appariement : une relation économique particulière entre deux catégories d'agents qui souhaitent être associés par paire :
  - Élèves et écoles,
  - Internes et hôpitaux,
  - Donneurs et receveurs d'organes.
- Qu'est-ce qui caractérise un appariement satisfaisant ?
- Dans quelle mesure une organisation centralisée peut-elle y parvenir ?

# Un article fondateur

## L'algorithme d'acceptation différée et la stabilité

Gale, D. et L. Shapley (1962),  
"College admissions and the stability of marriage"  
American Mathematical Monthly 69(1), 9–15.

# Le mariage comme métaphore

- Le modèle de base, basé sur une métaphore : le mariage.
- Les hommes, les femmes.
- Les hommes ont des préférences sur les femmes et inversement.
- Le résultat est un appariement.



# Exemple

$Men = \{m1, m2, m3\}$

$Women = \{w1, w2, w3\}$

$P_{m_1}$	$P_{m_2}$	$P_{m_3}$	$P_{w_1}$	$P_{w_2}$	$P_{w_3}$
$w_2$	$w_1$	$w_1$	$m_1$	$m_3$	$m_1$
$w_1$	$w_2$	$w_2$	$m_2$	$m_1$	$m_2$
$m_1$	$w_3$	$w_3$	$m_3$	$m_2$	$m_3$
$w_3$	$m_2$	$m_3$	$w_1$	$w_2$	$w_3$

$Un\ appariement : (m1,w1); (m2,w3); (m3,w2)$

# Un mécanisme centralisé

- Un mécanisme centralisé d'appariement associe un appariement à chaque profil de préférences des individus.
- Comment accorder “au mieux” les préférences ?
- Un type d'agent est favorisé : c'est le type qui fait la première proposition.

# L'algorithme d'acceptation différée

**Etape 1 :** Chaque homme  $m$  demande en mariage la femme qu'il préfère entre toutes, selon sa relation de préférence  $P_m$ . Si  $m$  préfère rester célibataire, il le reste définitivement : la procédure s'arrête pour lui.

Chaque femme choisit l'homme qu'elle préfère parmi ceux qui l'ont demandée en mariage et est appariée temporairement à cet homme (ou à elle-même si elle préfère rester célibataire). Les autres offres sont rejetées.

**Etape 2,3. . . :** Chaque homme dont la proposition a été refusée à l'étape précédente fait une proposition à son partenaire préféré (une femme ou lui-même) parmi ceux qui ne l'ont pas encore rejeté. Si ce partenaire préféré est lui-même, il reste définitivement célibataire : la procédure s'arrête pour lui.

Chaque femme choisit le partenaire qu'elle préfère, en considérant tous ceux qui viennent de la demander en mariage ainsi que le partenaire auquel elle était appariée à l'étape précédente. La femme est appariée temporairement au partenaire choisi. Les autres offres sont rejetées.

On répète cette étape jusqu'à ce que chaque homme soit apparié à une femme ou à lui-même. Si tel est le cas, tous les appariements temporaires deviennent définitifs (c'est-à-dire, prennent la forme de mariages).

L'algorithme s'arrête après un nombre fini d'étapes et produit **un appariement unique** :  
L'appariement de Gale et Shapley en faveur des hommes (ou appariement GS en faveur des femmes).

# La stabilité

Il n'existe pas un homme et une femme qui seraient plus heureux d'être mariés ensemble, plutôt que de rester chacun avec le conjoint qui leur a été attribué.

= Aucun couple ne bloque l'appariement.

Résultat de Gale et Shapley (1962) I : **L'appariement** de Gale et Shapley en faveur des hommes (ou appariement GS en faveur des femmes) **est stable**.

# L'optimalité

- Résultat de Gale et Shapley (1962) II :  
**L'appariement** de Gale et Shapley en faveur des hommes est **optimal** : il est préféré par chaque homme à tout autre appariement *stable*.

# Révélation des préférences

- L'algorithme de Gale et Shapley s'applique à une situation où l'organisation centralisée connaît les préférences des agents.
- Alvin Roth se pose la question suivante : est-il possible de construire un mécanisme, basé sur l'algorithme GS, auquel les agents doivent d'abord révéler leurs préférences ?

# Les agents sont-ils sincères ?

- Roth, A. (1982a) “The economics of matching : stability and incentives”, Mathematics of Operations Research 7, 617–628.
- **Le mécanisme est non manipulable** par tous les individus d’un type (homme ou femme) si tous ces individus ont intérêt à révéler leurs vraies préférences au planificateur.
- Résultat Roth (1982) :
- Il n’existe pas de mécanisme stable non manipulable par les deux types. Lorsque le mécanisme utilise l’algorithme GS, l’appariement qui en résulte est stable et seuls les agents qui font les propositions sont incités à être sincères.
- Implications ?
- La manipulation est difficile.
- Dans certains problèmes d’appariement, un des deux côtés n’est pas stratégique ou est contrôlé par le planificateur.



# Admission dans les collèges et les universités

- Le problème d'APB, AFELNET, ... :
- Il s'agit d'un appariement composé d'associations  
*(1 m; k w)*.
- Il existe l'analogue de l'algorithme d'acceptation différé et les résultats se généralisent.
- Mais si les collèges ont des préférences sur **les groupes d'élèves**, alors il n'existe pas de mécanisme sincère de la part des collèges.
- Le théorème des hôpitaux de campagne (Roth 1986) : si l'on veut que chaque collège ait son quota d'élèves (même les collèges les moins appréciés), alors il faut abandonner la propriété de stabilité.

# Alvin Roth ingénieur économiste

- L'algorithme GS est utilisé depuis 1952 (!) pour l'affectation des internes dans les hôpitaux de l'Association Américaine de Médecine.
- Nouveau problème : comment faire quand les internes sont en couple ?
- Roth montre que GS ne marche pas dans ce cas et propose un nouvel algorithme.

# Un “marché” de la transplantation

- Mécanisme pour l’allocation des reins : Une nouvelle situation
- Il n’y a plus qu’un type d’agent, qui détient un bien indivisible.
- **L’algorithme du cycle d’échange optimal** permet aux agents d’échanger leurs biens.
- Shapley, L. et H. Scarf (1974), “On cores and indivisibility”, *Journal of Mathematical Economics* 1, 23–37.

# Marché décentralisé ou mécanisme centralisé ?

- Les rigidités de l'appariement :
- Spécificité des “biens” recherchés qui ne sont pas des biens homogènes.
- Contrainte temporelle.
  
- Peut-on pour autant imaginer un marché décentralisé ?
- Roth et Xing (1994, 1997): les contraintes de calendrier peuvent empêcher de produire une affectation stable.

# Marché décentralisé ou mécanisme centralisé ?

- La stabilité est-elle le bon critère ?
- Le cas du marché des internes en médecine en Angleterre.
- Mise en place d'un mécanisme centralisé mais en laissant à chaque région le choix de son algorithme.
- Peu d'algorithmes choisis étaient stables au moment de la mise en place (fin années 60).
- Mais les algorithmes instables furent peu à peu remplacés.

# La carte scolaire

- Spécificité du problème :
- Les “préférences” des écoles sont déterminées par les autorités (non stratégiques).
- Le problème important : il faut que les parents disent la vérité (élicitation des préférences des parents) et que le résultat soit stable.
- L’algorithme GS qui favorise les parents est un bon candidat (Abdulkadiroglu et Sonmez 2003).
- Roth participe, à Boston puis à New York, à la réforme de la procédure de répartition des élèves entre les écoles publiques.
- En conséquence, à partir de 2008, les Etats Unis connaissent une vague de réformes visant à adopter l’algorithme d’acceptation différée.

# La carte scolaire

- Hiller et Tercieux (2014) : l'algorithme d'affectation des lycéens (AFFELNET) est conforme à l'algorithme GS qui favorise les lycées (!)
- Conséquences :
- Il est manipulable (même si difficilement)
- Il est optimal pour les lycées
- Il n'est pas optimal pour les élèves

# AFELNET n'est pas optimal pour les élèves

- Des paires d'élèves pourraient bloquer l'affectation.
- Un élève peut obtenir un moins bon choix pour lui en améliorant son score (priorité).
- Mais si la distance ou les notes scolaires font partie du score, les préférences des lycées ont sans doute d'autres dimensions pour intégrer par exemple la mixité sociale.